# Eine klassische Feldtheorie für die innere Struktur des Elektrons

Erwin Kasper

Lehrstuhl für Theoretische Elektronenphysik der Universität Tübingen

(Z. Naturforsch. **25 a**, 985—992 [1970]; eingegangen am 20. März 1970)

*A Classical Field Theory Describing the Inner Structure of an Electron*

A theory is given which permits a connection between an inner structure of an electron and the motion of its center of mass obeying Dirac's equation. In order to describe inner properties of the particle a classical nonlinear spinor equation is derived from a Lagrangian. There exist rotational symmetric solutions which are simultaneously finite, stationary, normalizable and strongly localisated, and which yield the mass at rest, the spin and the magnetic moment of the particle in a correct manner. Since these solutions are in contradiction to Heisenberg's uncertainty principle the calculated properties cannot be directly observed in the laboratory system. Therefore an eight-dimensional configuration space is introduced containing the laboratory system and the center-of-mass-system. In this space the wave equation is formulated as a nonlinear differential equation for a spin tensor of second order. If the interaction with an external electromagnetic field is very weak a separation of this tensor equation into the nonlinear spinor equation mentioned above and into Dirac's equation is possible. Observable quantities in the laboratory system can be obtained by integration over the inner coordinates.

## 1. Einleitung

In der Diracschen Theorie und auch in der darauf aufbauenden Quantenelektrodynamik wird von einer inneren Struktur des Elektrons abgesehen; die Frage nach einer solchen Struktur kann durch das bekannte Renormierungsverfahren [1] mit Erfolg umgangen werden. Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, zu zeigen, daß im Rahmen einer klassischen relativistischen Feldtheorie der Gedanke einer endlichen Ausdehnung des Elektrons in vernünftiger und widerspruchsfreier Weise mit der Diracschen Theorie verbunden werden kann. Die gewonnenen Aussagen gelten für das „nackte" Teilchen, sie sind durch Aussagen der Quantenelektrodynamik zu ergänzen.

Zur Beschreibung der inneren Struktur wird in den Abschnitten 2 und 3 eine nichtlineare Spinorgleichung aus einer Lagrange-Dichte abgeleitet und teilweise gelöst. Es gibt beschränkte, stationäre, normierbare und zugleich stark lokalisierbare Lösungen, welche Spin, magnetisches Moment und Ruhenergie eines freien nackten Teilchens richtig wiedergeben. Da solche Lösungen der Heisenbergschen Unschärferelation widersprechen, wird in Abschnitt 4 gezeigt, daß sich dieser Widerspruch durch Einführung eines Spintensors und eines formalen achtdimensionalen Konfigurationsraumes auflösen läßt. Die obigen Aussagen beziehen sich auf ein gedachtes Bezugssystem, in welchem der Teilchenmittelpunkt ruht, die Diracsche Theorie dagegen beschreibt die Bewegung des Teilchenmittelpunkts im Laborsystem. In der beschriebenen achtdimensionalen Dynamik läßt sich beides widerspruchsfrei vereinbaren, obwohl die Bewegung des Teilchenmittelpunkts unscharf ist. Bei Wechselwirkung mit schwachen äußeren Feldern werden die Aussagen der Diracschen Theorie voll beibehalten und durch die möglichen, aber noch nicht vollständigen Aussagen über die innere Struktur des Elektrons ergänzt.

## 2. Allgemeine Eigenschaften eines nichtlinearen freien Spinorfeldes

Die Wellengleichungen des Feldes werden aus einer Lagrange-Dichte abgeleitet, welche im folgenden drei skalare Invarianten enthalten soll. In Abschnitt 4 wird klar werden, daß dies auch notwendig ist, daß also eine Lagrange-Dichte, die wie üblich nur zwei Invarianten enthält, nicht ausreicht. Den Rechnungen wird eine Metrik mit der Zeitkomponente $x_4 = i\,c\,t$ zugrunde gelegt; dabei werde der dreidimensionale Ortsvektor mit $\boldsymbol{r}$, der vierdimensionale mit $\boldsymbol{x}$ bezeichnet. Weiter seien $\alpha_k$, $\beta$, $\gamma_k$ die üblichen Diracschen Matrizen. Der zu $\psi$ konjugiert komplexe Spinor werde mit $\psi^*$ bezeichnet, der adjungierte sei $\overline{\psi} = \psi^* \beta$.

Sonderdruckanforderungen an Dozent Dr. Erwin Kasper, Lehrstuhl für Theoretische Elektronenphysik der Universität Tübingen, *D-7400 Tübingen*, Zeppelinstr. 6.

[1] Siehe z. B. W. Macke, Quanten und Relativität, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1963, S. 168 ff.

Die einfachste skalare Invariante ist die Dichtefunktion

$$\eta(\boldsymbol{r}, t) = \overline{\psi}(\boldsymbol{r}, t)\ \psi(\boldsymbol{r}, t). \tag{1}$$

Aus dem Vierervektor der Stromdichte,

$$\boldsymbol{J} = i\, c\, \overline{\psi}\, \vec{\gamma}\, \psi, \tag{2}$$

läßt sich eine weitere Invariante der Dimension einer Teilchendichte ableiten:

$$\zeta = \left[-\frac{1}{c^2}\,\boldsymbol{J}^2\right]^{1/2} = \left[\varrho^2 - \frac{1}{c^2}\,\boldsymbol{j}^2\right]^{1/2}. \tag{3}$$

Dabei ist $\varrho = \psi^*\,\psi$ die übliche, positiv definite Teilchendichte und $\boldsymbol{j} = c\,\psi^*\,\vec{\alpha}\,\psi$ die dreidimensionale Teilchenstromdichte. Außer den Größen $\eta$ und $\zeta$ wird noch die Differentialinvariante

$$\Omega = \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}\left(\overline{\psi}\,\gamma_k\,\frac{\partial\psi}{\partial x_k} - \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_k}\,\gamma_k\,\psi\right) \tag{4}$$

benötigt. Damit die Wellengleichungen Differentialgleichungen erster Ordnung werden, muß die Lagrange-Dichte in $\Omega$ linear sein; daher kann man setzen:

$$L(\Omega, \eta, \zeta) = -\hbar\, c\left[\Omega + \varkappa\,(\eta + G(\eta, \zeta))\right]. \tag{5}$$

Dabei ist $\varkappa = m_0\, c/\hbar$. Die Funktion $G(\eta, \zeta)$ stellt die nichtlineare Abweichung von der Lagrange-Dichte der Dirac-Theorie dar, sie sei zunächst eine beliebige, stetig differenzierbare Funktion. Es folgen als Eulersche Gleichungen die beiden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4}\gamma_k\,\frac{\partial\psi}{\partial x_k} &= -\varkappa\left(\psi + \frac{\partial G}{\partial\overline{\psi}}\right),\\ \sum_{k=1}^{4}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_k}\,\gamma_k &= \varkappa\left(\overline{\psi} + \frac{\partial G}{\partial\psi}\right).\end{aligned} \tag{6}$$

Die weitere Auswertung liefert mit den Abkürzungen $G_\eta = \partial G/\partial\eta$, $G_\zeta = \partial G/\partial\zeta$ die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4}\gamma_k\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_k} - \frac{i\,\varkappa}{c\,\zeta}\,G_\zeta\,J_k\,\psi\right) &= -\varkappa(1 + G_\eta)\,\psi,\\ \sum_{k=1}^{4}\left(\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_k} + \frac{i\,\varkappa}{c\,\zeta}\,G_\zeta\,J_k\,\overline{\psi}\right)\gamma_k &= \varkappa(1 + G_\eta)\,\overline{\psi}.\end{aligned} \tag{7}$$

Hieraus folgt, daß die Kontinuitätsgleichung

$$\sum_{k=1}^{4}\frac{\partial J_k}{\partial x_k} = \frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{j} = 0 \tag{8}$$

erfüllt ist; ferner ergibt sich die Beziehung

$$L = m_0\, c^2\,(\eta\, G_\eta + \zeta\, G_\zeta - G). \tag{9}$$

Der Energieimpulstensor errechnet sich zu

$$T_{jk} = \frac{\hbar\, c}{4}\left(-\overline{\psi}\,\gamma_j\,\frac{\partial\psi}{\partial x_k} + \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_k}\,\gamma_j\,\psi - \overline{\psi}\,\gamma_k\,\frac{\partial\psi}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_j}\,\gamma_k\,\psi\right) - L\,\delta_{jk}. \tag{10}$$

Detaillierte Rechnungen zeigen, daß er divergenzfrei ist. Dies ist auch leicht einzusehen, da es sich hier um ein freies Feld handelt.

Weitere Vereinfachungen ergeben sich für ein stationäres Feld, das durch

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) = \psi(\boldsymbol{r})\,\exp(-i\,\omega\, t) \tag{11}$$

definiert ist. Die 1. Wellengleichung in (7) reduziert sich auf

$$\vec{\alpha}(\nabla + i\,\boldsymbol{w})\,\psi = (Q - P\,\beta)\,\psi \tag{12}$$

mit den Koeffizientenfunktionen

$$\begin{aligned}P &= \varkappa(1 + G_\eta), \quad Q = q - \frac{\varkappa}{\zeta}\,G_\zeta\,\varrho,\\ q &= \frac{\omega}{c}, \quad \boldsymbol{w} = -\frac{\varkappa}{c\,\zeta}\,G_\zeta\,\boldsymbol{j}.\end{aligned} \tag{13}$$

Aus dem Energieimpulstensor folgt bei der üblichen Normierung für die Energiedichte des Feldes der Ausdruck

$$\varepsilon = T_{44} = \hbar\,\omega\,\varrho - L, \tag{14}$$

während sich für die Impulsdichte folgende Beziehung ergibt:

$$\boldsymbol{p} = \frac{\hbar\,\omega}{2\,c^2}\,\boldsymbol{j} + \frac{\hbar}{4\,i}\left[\psi^*\,\nabla\psi - (\nabla\psi^*)\,\psi\right]. \tag{15}$$

Der dreidimensionale Spannungstensor ist von geringerer Bedeutung. Für das folgende ist nur wesentlich, daß wegen der Stationarität des Feldes und der Divergenzfreiheit von (10) die Kraftdichte verschwindet, so daß das Feld stabil ist.

## 3. Ein rotationssymmetrisches Feldmodell

Im allgemeinen Fall ist die Integration der Wellengleichung (7) bzw. (12) sehr kompliziert. Zu weiteren, relativ einfachen Aussagen gelangt man mit folgendem Lösungsansatz in Kugelkoordinaten:

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \psi(r, \vartheta, \varphi) = S(r, \vartheta)\begin{pmatrix} f(r)\cdot\cos\vartheta \\ f(r)\cdot\sin\vartheta\; e^{i\varphi} \\ -i\, g(r) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Die Funktionen $f(r)$, $g(r)$, $S(r, \vartheta)$ sind dabei reell. Es folgen zunächst die Beziehungen:

$$\varrho = S^2\,(f^2 + g^2), \qquad \eta = S^2\,(f^2 - g^2). \tag{17}$$

Die Vektoren $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r})$ haben jeweils nur eine Azimutalkomponente; es gilt für diese:

$$j_\varphi = c\,U \sin\vartheta\,,\quad w_\varphi = K\,r\sin\vartheta\,,$$

$$p_\varphi = \frac{\hbar}{2}\left(q\,U + \frac{S^2 f^2}{r}\right)\sin\vartheta\,. \tag{18}$$

Die darin auftretenden Koeffizientenfunktionen sind:

$$U(r,\vartheta) = 2\,S^2 f\,g\,,\quad K(r,\vartheta) = -\frac{\varkappa\,G_\zeta}{\zeta\,r}\,U\,. \tag{19}$$

Die Invariante $\zeta$ errechnet sich zu

$$\zeta = \sqrt{\varrho^2 - U^2\sin^2\vartheta}\,. \tag{20}$$

Die Wellengleichung (12) reduziert sich nun auf folgendes einfachere Differentialgleichungssystem:

$$f' + \frac{2}{r}\,f + \frac{f}{S}\frac{\partial S}{\partial r} + K\,r\,f\sin^2\vartheta = (P+Q)\,g\,, \tag{21}$$

$$g' \qquad + \frac{g}{S}\frac{\partial S}{\partial r} - K\,r\,g\sin^2\vartheta = (P-Q)\,f\,, \tag{22}$$

$$\partial S/\partial\vartheta = \tfrac{1}{2}\,K\,r^2\,S\sin 2\,\vartheta\,. \tag{23}$$

Es ist $f(r)$ eine ungerade Funktion, während $g(r)$ gerade ist. Beim Vorliegen einer regulären Lösung verschwindet folglich $f(r)$ im Ursprung, während $g(r)$ in seiner Umgebung konstant ist. Die Produktzerlegung in (16) ist noch nicht eindeutig. Man kann daher die Zusatzforderungen

$$\int_0^\pi S^2(r,\vartheta)\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = 2,\quad S^2(r,\vartheta) = S^2(r,\pi-\vartheta) \tag{24}$$

stellen, die sich mit (21), (22), (23) vereinbaren lassen. Da $K(r,\vartheta)$ für kleine $r$ beschränkt bleibt und gegen eine Konstante $K_0$ strebt, ergibt sich aus (23) eine Entwicklung nach Legendre-Polynomen von der Form

$$S^2(r,\vartheta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(r)\,P_{2\nu}(\cos\vartheta)\,. \tag{25}$$

Dabei ist $a_0 = 1$ und $a_1(r) = \frac{2}{3}\,K_0\,r^2$. Wegen (24) vereinfacht sich die Normierungsbedingung zu

$$\int r^2\left(f^2(r) + g^2(r)\right)\mathrm{d}r = 1\,. \tag{26}$$

Wegen (25) ist die Dichteverteilung des Feldes nicht nur rotationssymmetrisch in bezug auf die $z$-Achse sondern auch spiegelsymmetrisch in Bezug auf die $x$-$y$-Ebene.

Durch Auswertung des Integrals $\boldsymbol{I} = \int \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}\,\mathrm{d}^3 r$ folgt nach einigen partiellen Integrationen unter Verwendung der Gln. (21), (22) und (23) sowie der Normierungsbedingung (26) die Aussage $I_Z = \frac{1}{2}\hbar$. Dasselbe ergibt sich auch aus der Tatsache, daß nach (16) $\psi(\boldsymbol{r})$ eine Eigenfunktion des Drehimpulsoperators $\mathbf{I}_Z$ zum Eigenwert $\frac{1}{2}\,\hbar$ ist. Die obigen Formeln beschreiben also ein Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen.

Zur Bestimmung des magnetischen Moments wird der übliche Dipoltensor $\mathbf{M}^{(0)}$ eingeführt, seine Komponenten sind:

$$M_{jk}^{(0)} = -i\,\mu_\mathrm{B}(\overline{\psi}\,\gamma_j\,\gamma_k\,\psi - \eta\,\delta_{jk})\,. \tag{27}$$

Dabei ist $\mu_\mathrm{B} = e\,\hbar/2\,m_0\,c$ das Bohrsche Magneton; $e$ ist im folgenden positiv, die Ladung sei $-e$. Aus (27) folgen für die elektrische Polarisation $\mathfrak{P}^{(0)}$ und die Magnetisierung $\mathfrak{M}^{(0)}$ die Beziehungen:

$$\mathfrak{P}^{(0)} = \mu_\mathrm{B}\,U\,\boldsymbol{e}_r\,,\quad \mathfrak{M}^{(0)} = \mu_\mathrm{B}(\eta\cos\vartheta\,\boldsymbol{e}_r + \varrho\sin\vartheta\,\boldsymbol{e}_\vartheta)\,. \tag{28}$$

Die Vektoren $\boldsymbol{e}$ sind Einheitsvektoren in der durch den Index gekennzeichneten Richtung. Das magnetische Moment kann man am einfachsten durch das Integral

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2\,c}\int \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j}_\mathrm{e}\,\mathrm{d}^3 r + \int \mathfrak{M}\,\mathrm{d}^3 r \tag{29}$$

definieren, wobei für die elektrische Stromdichte $\boldsymbol{j}_\mathrm{e} = -e\,\boldsymbol{j}$ gelten soll. Setzt man in (29) für $\mathfrak{M}$ den Ausdruck $\mathfrak{M}^{(0)}$ aus (28) ein, so erhält man nicht automatisch den Wert $-\mu_\mathrm{B}$ für die $z$-Komponente von $\boldsymbol{m}$. Man kann dies aber in einfacher Weise erreichen, wenn man den Dipoltensor folgendermaßen Lorentz-invariant modifiziert:

$$M_{jk}(\boldsymbol{x}) = \tfrac{1}{2}\,M_{jk}^{(0)}(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{2\,i}\,\eta(\boldsymbol{x})\,\frac{1}{N}\int M_{jk}^{(0)}(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}^4 x',$$

$$N = [\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\{\textstyle\int \mathbf{M}^{(0)}(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}^4 x'\}^2]^{1/2}\,. \tag{30}$$

Unter $\mathrm{d}^4 x'$ ist das vierdimensionale Volumelement $\mathrm{d}x'\cdot\mathrm{d}y'(i\,c)\,\mathrm{d}t'$ verstanden. Bei nichtkonvergentem Integral ist ein endliches Integrationsvolumen zu verwenden, dessen Größe sich aus Zähler und Nenner in (30) herauskürzt. Die Definition (30) an Stelle von (27) hat die Konsequenz, daß nunmehr gilt:

$$\mathfrak{P} = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{P}^{(0)},\quad \mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{M}^{(0)} - \tfrac{1}{2}\,\mu_\mathrm{B}\,\eta\,\boldsymbol{e}_Z\,. \tag{31}$$

Im Fall $q = \varkappa = m_0\,c/\hbar$ gilt für die Magnetisierung bis auf unwichtige, zum integralen Moment $\boldsymbol{m}$ nichts beitragende Glieder die interessante Beziehung:

$$\mathfrak{M} = -\frac{e}{2\,m_0\,c}\,\psi^*\,\vec{\mathbf{L}}\,\psi\,, \tag{32}$$

wobei $\vec{\mathbf{L}}$ der Operator des Bahndrehimpulses ist. Die Definition (30) für den Dipoltensor ist nicht die einzig mögliche zur Beschreibung des magnetischen Moments. Sie hat aber den wesentlichen Vorteil besonderer Einfachheit. Es ist zu beachten, daß sie stets zum richtigen Resultat führt, gleichgültig welche Funktion $G(\eta,\zeta)$ man in der Lagrange-Dichte

(5) wählt. Dies hat den Vorteil, daß die Theorie in bezug auf das magnetische Moment auch für das Myon stimmen würde (sofern man von dessen Instabilität absieht). Bei geeigneter Wahl des Vorzeichens des Wurzelausdrucks $N$ in (30) erhält man sogar für eine ebene Diracsche Welle ein vernünftiges Resultat, nämlich $M_{jk} = M_{jk}^{(0)}$. Das alles zeigt, daß (30) eine sinnvolle Definition darstellt.

Die nichtlineare Wellengleichung (7) geht dann für sehr geringe Dichten ($|\eta| \to 0$, $\zeta \to 0$) in die Dirac-Gleichung über, wenn im Limes $G_\eta \to 0$, $G_\zeta \to 0$ gilt. Eine Analyse des Fernverhaltens der Lösungen von (21), (22) zeigt dann, daß diese wie $(1/r) \exp\{-\sqrt{\varkappa^2 - q^2}\, r\}$ abklingen. Demnach erhält man normierbare Lösungen für $-\varkappa < q < \varkappa$. Es ist auch noch der Fall $q = \varkappa$ sinvoll; dann fällt nämlich $f(r)$ asymptotisch wie $r^{-2}$ ab und $g(r)$ je nach Wahl der Funktion $G(\eta, \zeta)$ stärker als $r^{-2}$, so daß man auch in diesem Fall eine normierbare Lösung erhält; diese erfüllt asymptotisch die Laplace-Gleichung.

Ein interessanter Fall ist der, daß die Lagrange-Dichte $L$ gemäß (9) verschwindet. Dann hat die Gesamtenergie des Feldes nach (14) den Wert $\hbar\,\omega$. Mit dem Maximalwert von $q$, $q = \varkappa = m_0\, c/\hbar$, erhält man die Ruhenergie $E = m_0\, c^2$. Die hierfür erforderliche Beziehung

$$G(\eta, \zeta) = \zeta\, G_\zeta + \eta\, G_\eta \tag{33}$$

ist für jede lineare Funktion $G$ erfüllt, wobei insbesondere $G \equiv 0$ auf die Dirac-Gleichung führt. Eine allgemeinere Klasse möglicher Funktionen ist durch

$$G(\eta, \zeta) = \eta\, H(\zeta/\eta) \tag{34}$$

definiert. Das Verhältnis $\xi = \zeta/\eta$ ist eine dimensionslose Funktion. Diese hat für jede ebene Welle den Wert 1, so daß man mit $H(1) = 0$ den Anschluß an die Dirac-Theorie erreicht. Der Wert $E = m_0\, c^2$ ergibt sich unabhängig von der speziellen Wahl der Funktion $H(\xi)$, sofern nur die zugehörige Wellenfunktion beschränkt und normierbar ist. Die Energie ist durch ein Maximum ausgezeichnet, zu welchem mit $q = \varkappa$ das schwächste asymptotische Abklingen der Teilchendichte $\varrho(\boldsymbol{r})$ gehört. Durch Vertauschen der ersten beiden Komponenten in (16) mit den letzten beiden erhält man einen stabilen Zustand mit der Energie $E = -m_0\, c^2$, welchen man einem Antiteilchen zuzuordnen hat.

Der erste Term $\zeta\, G_\zeta$ in (33) läßt sich als ein internes Kopplungsglied deuten. Man kann nämlich formal einen Potential-Viererverktor $\boldsymbol{A}$ dadurch definieren, daß die linke Seite von (7) die gleiche Gestalt wie bei der Dirac-Gleichung haben soll. Dann muß mit (34) gelten:

$$\boldsymbol{A} = (\mathfrak{A}, i\, V) = -\frac{m_0\, c}{e\, \zeta(\boldsymbol{x})}\, H'(\xi)\, \boldsymbol{J}\,. \tag{35}$$

Aus (17) bis (20) folgt, daß die dreidimensionalen Vektoren $\boldsymbol{j}$ und grad $\zeta$ zueinander orthogonal sind. Da das Feld stationär ist, ergibt sich aus der Divergenzfreiheit von $\boldsymbol{j}$ die von $\mathfrak{A}$. Weiterhin ergibt sich dann, daß (35) der Lorentz-Konvention genügt. Durch Differentiation von (5) und durch Skalarmultiplikation von (35) mit $\boldsymbol{J}$ unter Beachtung von (3) verifiziert man:

$$-(e/c)\, \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{J} = \sum_k J_k (\partial L / \partial J_k) = \zeta\, G_\zeta\,. \tag{36}$$

Der zweite Term $\eta\, G_\eta$ in (33) läßt sich nicht in so einfacher Weise deuten. Eine weitere Beziehung folgt noch durch Berechnung der Spur des Energieimpulstensors. Mit der sich aus (21) und (22) ergebenden Gleichung

$$S^2 (f\, g' - f'\, g) = P\, \eta - Q\, \varrho + (1/r)\, U + K\, r\, U \sin^2 \vartheta \tag{37}$$

folgt aus (10) nach einiger elementarer Rechnung wegen (33), (13) und (5) die Beziehung

$$\mathrm{Sp}\, T = m_0\, c^2\, (\eta + \eta\, G_\eta + \zeta\, G_\zeta) = -\hbar\, c\, \Omega\,. \tag{38}$$

Die in diesem Abschnitt abgeleiteten Gleichungen reichen nicht zur völligen Bestimmung der inneren Struktur eines Elektrons aus, insbesondere deshalb nicht, weil keineswegs selbstverständlich ist, daß man auf das innere Feld, sofern dieses überhaupt rein elektromagnetischer Natur ist, die Maxwell-Gleichungen anwenden kann. Die hier skizzierte Theorie ist also noch recht unvollständig, zumal die Funktion $H(\xi)$ noch völlig unbestimmt ist. Durch geeignete Wahl von $H(\xi)$ läßt sich ein Zustand konstruieren, welcher zugleich stationär, normierbar und überall beschränkt ist. Dies läßt sich sicher erreichen, wenn $H(\xi)$ genügend viele frei verfügbare skalare Parameter enthält. Gleichung (7) wird damit zu einem sehr komplizierten nichtlinearen Eigenwertproblem. Es konnte aber gezeigt werden, daß sich Spin, magnetisches Moment und Ruhenergie für ein Elektron richtig ergeben, ohne daß es nötig ist, Gl. (7) explizite zu lösen. Die Theorie beschreibt also die beobachtbaren Eigenschaften des „nackten" Teilchens richtig ohne jegliche Singularität. Darin liegt die Bedeutung der hier skizzierten Theorie.

## 4. Beziehungen zur Schwerpunktsbewegung des Teilchens

Die Aussagen des Abschnitts 3 sollen, wie eingangs erwähnt, die inneren Eigenschaften eines Teilchens (eines Elektrons) beschreiben. Es ist klar, daß diese nicht einfach mit den beobachtbaren äußeren Eigenschaften des Feldes identisch sind. Das geht schon daraus hervor, daß man stark lokalisierte stationäre Lösungen der Energie $E = m_0 c^2$ konstruieren kann, was mit der Heisenbergschen Unschärferelation unverträglich ist. Es bleibt also noch die Aufgabe, zu zeigen, wie man das in den Abschnitten 2 und 3 behandelte Spinorfeld mit der im Laborsystem gültigen Dirac-Gleichung in Beziehung setzen kann.

Eine Möglichkeit der Deutung besteht darin, daß man die Dichteverteilung $|\psi(\boldsymbol{x})|^2$, welche die Dirac-Gleichung liefert, als Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Schwerpunkt des Teilchens auffaßt, während die räumliche Verteilung der inneren Struktur durch einen zusätzlichen Faktor beschrieben wird, welcher zu der Diracschen Theorie als verborgener Faktor hinzutritt. Dieser Gedanke soll im folgenden beschrieben werden.

Es werden innere und äußere Größen eingeführt und durch obere Indizes i bzw. e unterschieden. Größen ohne oberen Index enthalten sowohl innere als auch äußere Anteile; zur Unterscheidung von gleichlautenden Symbolen in den Abschnitten 2 und 3 wird das Zeichen $\sim$ gebraucht. Die Darstellung der Theorie erfordert achtdimensionale Vektoren. Der Ortsvektor lautet speziell:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= (x_1 \dots x_8) = (\boldsymbol{x}^{\mathrm{i}}, \boldsymbol{x}^{\mathrm{e}}), \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{i}} = (x_1 \dots x_4) \\ &= (x_1{}^{\mathrm{i}} \dots x_4{}^{\mathrm{i}}), \ \boldsymbol{x}^{\mathrm{e}} = (x_5 \dots x_8) = (x_1{}^{\mathrm{e}} \dots x_4{}^{\mathrm{e}}). \end{aligned} \tag{39}$$

Die Indizierung wird bei jedem anderen achtdimensionalen Vektor analog durchgeführt. Außerdem sollen Indizes, die von 1 bis 4 laufen, durch lateinische Buchstaben gekennzeichnet sein, dagegen solche, die von 1 bis 8 laufen, durch griechische. Über doppelt auftretende untere Indizes werde summiert. Da $\gamma_1 = \gamma_5, \dots, \gamma_4 = \gamma_8$ gelten möge, erhalten Dirac-Matrizen keine oberen Indizes. Ableitungen nach den Ortskoordinaten werden durch das Symbol $\partial$ oder in der üblichen Weise mit unteren Indizes bezeichnet.

Der Vierervektor $\boldsymbol{x}^{\mathrm{e}}$ in (39) soll die Position des Teilchenschwerpunkts im Laborsystem beschreiben, der Vierervektor $\boldsymbol{x}^{\mathrm{i}}$ die Position eines beliebigen Aufpunkts in einem Bezugssystem, in welchem für den Schwerpunkt $\boldsymbol{x}^{\mathrm{i}} = 0$ gilt. Dieser Gedanke widerspricht der üblichen Quantentheorie, denn eine Lorentz-Transformation, die das Laborsystem in das Schwerpunktsystem überführt, kann nicht angegeben werden, weil die Schwerpunktsbewegung nicht scharf definiert ist. Es ist daher sehr wesentlich, daß die nachfolgende Theorie so formuliert wird, daß eine solche Transformation gar nicht benötigt wird. Es wird nämlich darauf verzichtet, die innere Verteilung im Laborsystem anzugeben. Die acht Koordinaten $x_1, \dots, x_8$ werden als unabhängige Veränderliche behandelt, was bei einem freien Teilchen sicherlich erlaubt ist, weil bei diesem die innere Dichteverteilung von der Schwerpunktsbewegung unabhängig ist.

Diesem Sachverhalt entspricht ein Produktansatz für die Wellenfunktion:

$$\begin{aligned} \chi(\boldsymbol{x}) &= \psi^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{i}}) \circ \bar{\psi}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{e}}), \quad \chi_{jk}(\boldsymbol{x}) = \psi_j^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{i}})\, \bar{\psi}_k^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{e}}), \\ \bar{\chi}(\boldsymbol{x}) &= \psi^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{e}}) \circ \bar{\psi}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{i}}), \quad \bar{\chi}_{jk}(\boldsymbol{x}) = \psi_j^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{e}})\, \psi_k^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{i}}), \end{aligned} \tag{40}$$

denn genau dann zerfällt die Wahrscheinlichkeitsdichte in ein Produkt zweier unabhängiger Dichtefunktionen:

$$\varrho(\boldsymbol{x}) = \sum_{j,k} |\chi_{jk}(\boldsymbol{x})|^2 = |\psi^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{i}})|^2 \cdot |\psi^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{e}})|^2. \tag{41}$$

Die Wellenfunktion ist jetzt ein Tensor 2. Stufe im vierdimensionalen Spinorraum; durch das Symbol $\circ$ wird das dyadische Produkt zweier Spinoren bezeichnet. Gilt für jeden Spinor beim Wechsel des Bezugssystems die Spinortransformation $\psi = S\,\psi'$, so wird das Transformationsgesetz für einen Tensor durch $\chi = S\,\chi'\,\bar{S}$ definiert. Dabei ist die Spur des Tensors eine Invariante. Die Beziehung zwischen einem Tensor $\chi$ und dem zu ihm adjungierten Tensor $\bar{\chi}$ wird durch $\bar{\chi} = \beta\,\chi^+\,\beta$ gegeben, wobei $\chi^+$ der zu $\chi$ hermitesch konjugierte Tensor ist.

Die Theorie wird zunächst weitgehend analog zu der des Abschnitts 2 formuliert, wobei nicht explizite die Produktseparation des Tensors $\chi$ benötigt wird. Eine skalare Invariante ist die Größe

$$\tilde{\eta} = \mathrm{Sp}\,\bar{\chi}\,\chi = \bar{\chi}_{jk}\,\chi_{kj}\,. \tag{42}$$

Zwei Vierervektoren und ein achtdimensionaler Vektor sind durch

$$\begin{aligned} \boldsymbol{W}^{\mathrm{i}} &= i\,c\,\mathrm{Sp}(\bar{\chi}\,\vec{\gamma}\,\chi), \\ \boldsymbol{W}^{\mathrm{e}} &= i\,c\,\mathrm{Sp}(\chi\,\vec{\gamma}\,\bar{\chi}), \quad \boldsymbol{W} = (\boldsymbol{W}^{\mathrm{i}}, \boldsymbol{W}^{\mathrm{e}}) \end{aligned} \tag{43}$$

gegeben. Aus ihnen lassen sich weitere skalare Invarianten konstruieren:

$$\tilde{\zeta}^{\mathrm{i}} = \left[-\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{W}^{\mathrm{i}})^2\right]^{1/2}, \qquad \tilde{\zeta}^{\mathrm{e}} = \left[-\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{W}^{\mathrm{e}})^2\right]^{1/2}. \tag{44}$$

Da die Wellengleichung für $\psi^e$ linear werden soll, wird $\widetilde{\zeta}^e$ nicht benutzt werden; es wird daher vereinfachend $\widetilde{\zeta}^i = \widetilde{\zeta}$ gesetzt. Als Differentialinvariante soll verwendet werden:

$$\widetilde{\Omega} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\big(\bar{\chi}\,\gamma_k(\overrightarrow{\partial}{}^i_k - \overleftarrow{\partial}{}^i_k)\,\chi - \chi\,\gamma_k(\overrightarrow{\partial}{}^e_k - \overleftarrow{\partial}{}^e_k)\,\bar{\chi}\big)\,. \tag{45}$$

Die Pfeile deuten an, welcher Faktor jeweils zu differenzieren ist. Die Wechselwirkung mit dem Vierervektor eines äußeren elektromagnetischen Feldes $\boldsymbol{A}^e(\boldsymbol{x}^e)$ wird vereinfacht durch die Invariante

$$\hbar\, c\, \widetilde{\Omega}' = \frac{e}{c}\, A^e_k\,(\boldsymbol{x}^e)\, W^e_k \tag{46}$$

beschrieben. Eine mögliche Lagrange-Funktion, die jetzt die Dimension Energie·Länge$^{-7}$ hat, lautet:

$$\widetilde{L}(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Omega}', \widetilde{\eta}, \widetilde{\zeta}) = -\hbar\, c\,\big(\widetilde{\Omega} + \widetilde{\Omega}' + \varkappa\, \widetilde{G}\,(\widetilde{\eta}, \widetilde{\zeta})\big)\,. \tag{47}$$

Die Eulerschen Gleichungen hierzu,

$$\partial_\varrho(\partial\widetilde{L}/\partial\chi_{jk|\varrho}) = \partial\widetilde{L}/\partial\chi_{jk}\,,\; \partial_\varrho(\partial\widetilde{L}/\partial\bar{\chi}_{jk|\varrho}) = \partial\widetilde{L}/\partial\bar{\chi}_{jk} \tag{48}$$

ergeben nach einiger Rechnung:

$$\partial^i_k\,(\bar{\chi}\,\gamma_k) + \partial^e_k\,(\gamma_k\,\bar{\chi}) = \varkappa\,\widetilde{G}_{\tilde{\eta}}\,\bar{\chi} + \frac{i\,e}{\hbar\,c}\,A^e_k\,\gamma_k\,\bar{\chi} + \frac{\varkappa}{i\,c\,\widetilde{\zeta}}\,\bar{\chi}\,\gamma_k\,W^i_k\,. \tag{49}$$

$$-\partial^i_k\,(\gamma_k\,\chi) - \partial^e_k\,(\chi\,\gamma_k) = \varkappa\,\widetilde{G}_{\tilde{\eta}}\,\chi + \frac{i\,e}{\hbar\,c}\,\chi\,\gamma_k\,A^e_k + \frac{\varkappa}{i\,c\,\widetilde{\zeta}}\,W^i_k\,\gamma_k\,\chi\,, \tag{50}$$

Man verifiziert die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu\, W_\mu = \partial^i_k\, W^i_k + \partial^e_k\, W^e_k = 0\,, \tag{51}$$

ferner die Beziehung

$$\widetilde{L} = \hbar\, c\,\varkappa(\widetilde{\eta}\,\widetilde{G}_{\tilde{\eta}} + \widetilde{\zeta}\,\widetilde{G}_{\tilde{\xi}} - \widetilde{G})\,. \tag{52}$$

Setzt man nun den Produktansatz (40) in (49) und (50) ein, so zeigt sich, daß dieser genau dann zu einer exakten Separation führt, wenn gilt:

$$\widetilde{G}(\widetilde{\eta}, \widetilde{\zeta}) = \widetilde{\eta}\cdot H\Big(\frac{\widetilde{\zeta}}{\widetilde{\eta}}\Big) = \widetilde{\eta}\cdot H(\xi)\,. \tag{53}$$

Man erhält die Produktdarstellungen:

$$\widetilde{\eta} = \eta^i(\boldsymbol{x}^i)\,\eta^e(\boldsymbol{x}^e)\,,\quad \boldsymbol{W}^i = \eta^e(\boldsymbol{x}^e)\,\boldsymbol{J}^i(\boldsymbol{x}^i)\,,\quad \boldsymbol{W}^e = \eta^i(\boldsymbol{x}^i)\,\boldsymbol{J}^e(\boldsymbol{x}^e)\,, \tag{54}$$

$$\widetilde{\zeta} = \eta^e(\boldsymbol{x}^e)\,\zeta^i(\boldsymbol{x}^i)\,,\quad \xi = \widetilde{\zeta}/\widetilde{\eta} = \xi^i/\eta^i\,. \tag{55}$$

Es ergeben sich die Wellengleichungen:

$$\gamma_k\Big(\partial^e_k + \frac{i\,e}{\hbar\,c}\,A^e_k(\boldsymbol{x}^e)\Big)\psi^e(\boldsymbol{x}^e) = -\varkappa\,\psi^e(\boldsymbol{x}^e)\,, \tag{56}$$

$$\gamma_k\Big(\partial^i_k - \frac{i\,\varkappa}{c\,\zeta^i(\boldsymbol{x}^i)}\,H'(\xi)\,J^i_k\,(\boldsymbol{x}^i)\Big)\,\psi^i(\boldsymbol{x}^i) = -\varkappa\big(1 + H(\xi) - \xi\,H'(\xi)\big)\,\psi^i(\boldsymbol{x}^i)\,, \tag{57}$$

sowie die dazu adjungierten Gleichungen. Gl. (56) ist die Dirac-Gleichung, (57) die in den Abschnitten 2 und 3 behandelte nichtlineare Spinorgleichung bei Gültigkeit von (34). Damit ist der Anschluß an die dort behandelte Theorie gewonnen. Es zeigt sich somit, daß die Bedingung (34), welche in besonders einfacher Weise auf die Aussage $E = m_0\,c^2$ im Schwerpunktsystem führte, nicht nur aus diesem Grunde zu postulieren ist, sondern daß sie auch für die Separation der Wellengleichung notwendig und hinreichend ist. Dies ist eine sehr starke Stütze der hier behandelten Theorie. Da Gl. (34) die beiden Invarianten $\zeta^i$ und $\eta^i$ enthält und außerdem die Differentialinvariante $\Omega^i$ zur Formulierung einer Lagrange-Dichte benötigt wird, ist somit klar, daß die behandelte nichtlineare Spinortheorie mindestens drei skalare Invarianten enthalten muß.

Zur Berechnung des Energieimpulstensors wird der achtdimensionale kanonische Tensor

$$\widetilde{\Theta}_{\mu\nu} = \frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\chi_{jk|\mu}}\,\chi_{jk|\nu} + \frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\bar{\chi}_{jk|\mu}}\,\bar{\chi}_{jk|\nu} - \widetilde{L}\,\delta_{\mu\nu} \tag{58}$$

eingeführt, aus welchem zunächst ein achtdimensionaler Energieimpulstensor durch Symmetrisierung hervorgeht. Setzt man in diesen (40) ein und berücksichtigt, daß $\widetilde{L}$ wegen (52) und (53) verschwindet, so erhält man folgende Resultate für $j,\, k = 1, \ldots, 4$:

$$\widetilde{T}_{jk} = \eta^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{e}})\, T^{\mathrm{i}}_{jk}\,(\boldsymbol{x}^{\mathrm{i}})\,,\ \widetilde{T}_{j+4,k+4} = -\,\eta^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{i}})\, T^{\mathrm{e}}_{jk}\,(\boldsymbol{x}^{\mathrm{e}})\,, \tag{59}$$

$$\widetilde{T}_{j,k+4} = \tfrac{1}{2}\,(J^{\mathrm{i}}_j(\boldsymbol{x}^{\mathrm{i}})\, P^{\mathrm{e}}_k\,(\boldsymbol{x}^{\mathrm{e}}) - P^{\mathrm{i}}_j\,(\boldsymbol{x}^{\mathrm{i}})\, J^{\mathrm{e}}_k\,(\boldsymbol{x}^{\mathrm{e}}))\,. \tag{60}$$

Dabei sind $T^{\mathrm{e}}_{jk}$ und $T^{\mathrm{i}}_{jk}$ die üblichen vierdimensionalen Energieimpulstensoren im Labor- und Schwerpunktssystem. Die Größen

$$P^{\mathrm{i}}_j = \frac{\hbar}{2\,i}\,\overline{\psi}^{\mathrm{i}}(\overrightarrow{\partial}{}^{\mathrm{i}}_j - \overleftarrow{\partial}{}^{\mathrm{i}}_j)\,\psi^{\mathrm{i}}\,,\quad P_j = \frac{\hbar}{2\,i}\,\overline{\psi}^{\mathrm{e}}(\overrightarrow{\partial}{}^{\mathrm{e}}_j - \overleftarrow{\partial}{}^{\mathrm{e}}_j)\,\psi^{\mathrm{e}} \tag{61}$$

sind die Komponenten der beiden Vierervektoren der kanonischen Impulsdichte.

Physikalische Meßgrößen im Laborsystem erhält man, indem man in invarianter Weise über die inneren Koordinaten integriert:

$$T^{\mathrm{e}}_{jk}\,(\boldsymbol{x}^{\mathrm{e}}) = \frac{1}{N^{\mathrm{i}}}\int \widetilde{T}_{j+4,k+4}\,\mathrm{d}^4x^{\mathrm{i}}\,,\quad N^{\mathrm{i}} = -\int \eta^{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}^4x^{\mathrm{i}}\,. \tag{62}$$

Bei divergenten Integralen ist ein endliches Integrationsvolumen zu verwenden, dessen Größe sich aus Zähler und Nenner von (62) herauskürzt. Gl. (62) macht den Mittelwertcharakter des Tensors im Laborsystem deutlich. Es ist interessant, daß auch

$$T^{\mathrm{i}}_{jk}\,(\boldsymbol{x}^{\mathrm{i}}) = \frac{1}{N^{\mathrm{e}}}\int \widetilde{T}_{jk}\,\mathrm{d}^4x^{\mathrm{e}}\,,\quad N^{\mathrm{e}} = \int \eta^{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}^4x^{\mathrm{e}} \tag{63}$$

gilt, daß also eine weitgehende Reziprozität zwischen den beiden Bezugssystemen besteht. Der Tensor (60) hat keine wesentliche Bedeutung, er soll hier nicht weiter untersucht werden. Völlig analog zu den Komponenten der Energieimpulstensoren lassen sich auch die Stromdichtevektoren durch Integration gewinnen:

$$\boldsymbol{J}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{e}}) = -\frac{1}{N^{\mathrm{i}}}\int \boldsymbol{W}^{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}^4x^{\mathrm{i}}\,,\quad \boldsymbol{J}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{i}}) = \frac{1}{N^{\mathrm{e}}}\int \boldsymbol{W}^{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}^4x^{\mathrm{e}}\,. \tag{64}$$

Beide Vektoren sind divergenzfrei.

Die innere Konsistenz der hier skizzierten Theorie zeigt sich darin, daß die Größen $\boldsymbol{J}^{\mathrm{i}}$, $T^{\mathrm{i}}_{jk}$, welche nicht direkt beobachtbar sind, in richtiger Weise Teilcheneigenschaften beschreiben, welche in die Wellengleichung für die Schwerpunktsbewegung eingehen. So ergeben sich nach invarianter Integration über die inneren Koordinaten genau diejenigen Werte für die Ruhenergie, den Spin und das magnetische Moment, die das Elektron im Schwerpunktssystem haben sollte. Es zeigt sich, daß der Gedanke, die innere Verteilung in Laborkoordinaten zu beschreiben, das einzige Hindernis gegen eine widerspruchsfreie Theorie ist. Gibt man ihn auf, so gelangt man zu physikalisch sinnvollen Aussagen. Diese Tatsache sowie die weitgehende Symmetrie der Formeln des Abschnitts 4 lassen die Einführung eines achtdimensionalen Raumes mit inneren und äußeren Koordinaten vernünftig erscheinen.

Man kann die beiden Vierervektoren $\boldsymbol{A}^{\mathrm{i}}$ und $\boldsymbol{A}^{\mathrm{e}}$ für das innere bzw. äußere elektromagnetische Potential zu einem achtdimensionalen Vektor

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{i}}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{e}})$$

zusammenfassen. Dabei beschreibt $\boldsymbol{A}^{\mathrm{e}}$ gemäß (46) die äußere elektromagnetische Wechselwirkung, während $\boldsymbol{A}^{\mathrm{i}}$ gemäß (36) auf einen Teil der inneren Selbstwechselwirkung führt. Die achtdimensionale Symmetrie kommt in den Formeln

$$\frac{e}{c}\,A_\varrho = -\,\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial W_\varrho}\,,\quad \partial_\mu A_\mu = 0 \tag{65}$$

zum Ausdruck. Der Ausdruck (46) stellt sicherlich eine Vereinfachung des elektromagnetischen Wechselwirkungsterms dar, da in ihm die äußere Wechselwirkung im Schwerpunkt $\boldsymbol{x}^{\mathrm{e}}$ lokalisiert ist und die innere Struktur des Teilchens nicht wesentlich ist. Diese Vereinfachung ist sinnvoll, wenn die Feldstärken des äußeren Feldes im Vergleich zu denen des inneren vernachlässigbar klein sind. Dann ist die innere Struktur praktisch nicht durch das äußere Feld beeinflußt; d. h. die Produktseparation (40), die zur völligen Entkoppelung von (56) und (57) führt, ist erlaubt.

Diese Näherung trifft für alle makroskopischen äußeren Felder sowie für alle bei niederenergetischen Teilchenstößen wirksamen Felder zu, so daß hier eine völlig widerspruchsfreie Theorie gefunden ist. Bei hochenergetischen Teilchenstößen hat der Wechselwirkungsterm (46) und damit die Lagrange-Funktion ein kompliziertere Gestalt. Dann ist der Produktansatz (40) nicht mehr erlaubt, der Spintensor ist von wesentlich allgemeinerer Form. Die inneren Koordinaten $x_j^{\mathrm{i}}$ werden dann nicht mehr lediglich verborgene Parameter sein. An Stelle von (47) kann man von der allgemeineren Lagrange-Funktion

$$\widetilde{L} = -\hbar\, c\, \widetilde{\Omega} - m_0\, c^2\, \widetilde{F}(\widetilde{\eta}, \boldsymbol{W}^{\mathrm{i}}, \boldsymbol{W}^{\mathrm{e}}, \lambda^{\mathrm{e}}) \tag{66}$$

ausgehen, in welcher $\widetilde{F}$ eine beliebige skalarwertige Lorentz-invariante Funktion ihrer Argumente ist. Durch $\lambda^{\mathrm{e}}$ sollen die Größen des äußeren Feldes bezeichnet sein, welche für die Wechselwirkung mit dem Spinorfeld von Bedeutung sind. An Stelle von (49) und (50) ergeben sich dann die allgemeineren Wellengleichungen

$$\partial_k^{\mathrm{i}}\,(\bar{\chi}\,\gamma_k) + \partial_k^{\mathrm{e}}\,(\gamma_k\,\bar{\chi}) = \varkappa\left(\bar{\chi}\,\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\widetilde{\eta}} + \bar{\chi}\,\gamma_k\,\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial W_k^{\mathrm{i}}} + \frac{\partial\widetilde{F}}{\partial W_k^{\mathrm{e}}}\,\gamma_k\,\bar{\chi}\right),$$
$$-\partial_k^{\mathrm{i}}\,(\gamma_k\,\chi) - \partial_k^{\mathrm{e}}\,(\chi\,\gamma_k) = \varkappa\left(\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\widetilde{\eta}}\,\chi + \frac{\partial\widetilde{F}}{\partial W_k^{\mathrm{i}}}\,\gamma_k\,\chi + \chi\,\gamma_k\,\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial W_k^{\mathrm{e}}}\right). \tag{67}$$

Man verifiziert, daß auch aus diesen Gleichungen die Kontinuitätsgleichung (51) folgt, daß also (51) nicht etwa speziell nur eine Folge des Separationsansatzes (40) und der darauf aufbauenden Schlüsse ist. Statt (52) erhält man nun

$$\widetilde{L} = m_0\,c^2\left(\widetilde{\eta}\,\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\widetilde{\eta}} + W_k^{\mathrm{i}}\,\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial W_k^{\mathrm{i}}} + W_k^{\mathrm{e}}\,\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial W_k^{\mathrm{e}}} - \widetilde{F}\right). \tag{68}$$

Durch geeignete Wahl der Funktion $\widetilde{F}$ wird man sehr komplizierte nichtlineare Wechselwirkungen beschreiben können, ohne daß Divergenzen auftreten. Es ist klar, daß eine so verallgemeinerte nichtlineare Theorie mit einem Spintensor und einem achtdimensionalen Konfigurationsraum wesentlich mehr Spielraum besitzt als eine nichtlineare Theorie mit einem Spinvektor und einem vierdimensionalen Konfigurationsraum. Daher ist es durchaus denkbar, daß die hier dargelegte Theorie nach weiterer Vervollständigung, insbesondere durch Hinzunahme der Feldquantisierung und Einbau in die Quantenelektrodynamik sehr erfolgreich sein könnte.

# Instabilität der positiven Säule endlicher Länge im magnetischen Feld

G. JANZEN
Institut für Gasentladungen und Photoelektronik der Universität Stuttgart

F. MOSER und E. RÄUCHLE
Institut für Plasmaforschung der Universität Stuttgart

(Z. Naturforsch. **25 a**, 992—1006 [1970]; eingegangen am 21. Dezember 1969)

*Instability of the Positive Column of Finite Length in a Magnetic Field*

The instability of a diffusion-dominated positive column of a gas discharge in a longitudinal magnetic field is investigated both experimentally and theoretically. Dispersion relations are derived for the case of an $m=1$ helical instability considering the finite length of the column. Regions of instability are calculated for various wavelengths of the instability.

Experiments were carried out in a positive column of variable length, ranging from 8.5 to 40 cm, at varying pressures of about 0.1 Torr of Neon.

There is a satisfactory agreement between theory and experiments. The main results are:

a) in long tubes instability occurs at a distinct magnetic field, calculated first by Kadomtsev and Nedospasov. Stable intermediate regions are possible at higher fields depending on the relations between the plasma-parameters;

b) in short tubes the column is stable again for higher magnetic fields;

c) in very short tubes there is no instability of this kind.

The observed frequency spectrum agrees with the theoretical values.

Das Plasma der positiven Säule einer Niederdruck-Gasentladung ist ein geeignetes Medium, um Diffusionsinstabilitäten zu untersuchen, die bei inhomogenen Dichteverteilungen auftreten.

Befindet sich die positive Säule in einem äußeren Längsmagnetfeld $B$, so wird die radiale Diffusion reduziert, was zu einer Verringerung der elektrischen Längsfeldstärke $E$ der Entladung führt [1]. Eine Abweichung von diesem Verhalten, nämlich ein Anstieg der elektrischen Feldstärke, tritt ab einer bestimmten kritischen Magnetfeldstärke $B_c$ auf. Dies wurde insbesondere von HOH und LEHNERT [2] beobachtet und diskutiert. Ähnliche Untersuchungen wurden in großer Zahl durchgeführt. Eine ausführ-

Sonderdruckanforderungen an Dipl.-Math. F. MOSER, Institut für Plasmaforschung der Universität Stuttgart, *D-7000 Stuttgart 80*, Pfaffenwaldring 31.

[1] R. I. BICKERTON u. A. v. ENGEL, Proc. Phys. Soc. London B **69**, 468 [1956].

[2] F. C. HOH u. B. LEHNERT, Proc. of the Fourth Int. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, Uppsala 1959, Report III b, 25.